לוגיקה ותורת הקבוצות - 2026

פתרון תרגיל 3

15 נקודות

1. תהיינה A, B קבוצות. הוכיחו:

א. אם $A \subseteq B$ ו-B בת מניה אז A בת מניה.

ב. תהי P קבוצת כל המספרים הראשוניים. הוכיחו ש-$P \sim \mathbb{N}$.

(ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בקורסים אחרים).

פתרון:

א. מהיות B בת מניה מתקיים $|B| \leq \aleph_0$.

מכיוון ש-$A \subseteq B$ הרי שלפי טענה שהוכחנו $|A| \leq |B|$.

מטרנזיטיביות סדר עוצמות נקבל $|A| \leq \aleph_0$.

מכאן ש-A בת מניה כנדרש.

ב. נוכיח בעזרת משפט קש"ב:

- ברור ש-$P \subseteq \mathbb{N}$, לכן לפי סעיף א' P בת מניה, כלומר $|P| \leq |\mathbb{N}|$.
- ידוע שיש אינסוף ראשוניים, לכן ברור ש-$|P| \geq |\mathbb{N}|$ (כי עוצמת $\mathbb{N}$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר).
- לכן, לפי משפט קש"ב מתקיים: $|P| = |\mathbb{N}|$, כלומר $P \sim \mathbb{N}$ כנדרש.

15 נקודות

.2 בשפה מסוימת יש בדיוק 10 אותיות.

כל מילה בשפה היא רצף באורך סופי של האותיות הללו.

(ניתן להניח שכל רצף מהווה מילה בעלת משמעות בשפה).

נסמן ב-A את קבוצת המילים כל המילים בשפה. הוכיחו ש-$|A| = \aleph_0$.

פתרון:

נוכיח $|\mathbb{N}| \leq |A|$:

בשפה יש 10 אותיות. נבחר אחת (ספציפית) מביניהן ונסמן אותה "a".

נגדיר $f: \mathbb{N} \to \boldsymbol{A}$ באופן הבא: $f(n) = \underbrace{"a \dots a"}_{n+1\ times}$

f מלאה ומוגדרת היטב: ניתן לראות ש-f מוגדרת לכל איבר בתחום (בפרט עבור $n = 0$ מוגדרת המילה "a"). כמו כן התמונות בטווח כי המילה המוחזרת בנויה מאותיות השפה והיא סופית.

f חח"ע:

- יהיו $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ המקיימות $f(n_1) = f(n_2)$.
- מהגדרת הפונקציה: $\underbrace{"a \dots a"}_{n_1+1\ times} = \underbrace{"a \dots a"}_{n_2+1\ times}$.
- לכן $n_1 + 1 = n_2 + 1$ וברור ש-$n_1 = n_2$.

נוכיח: $|A| \leq |\mathbb{N}|$

- לכל $i \in \mathbb{N}$ נסמן ב-A_i את קבוצת המילים בשפה אשר הינן באורך i.
- נשים לב ש-$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.
- כל A_i הינה קבוצה סופית מכיוון שמספר האפשרויות למילים באורך i מ-10 האותיות בשפה הוא 10^i. לכן בפרט כל קבוצה A_i היא בת-מניה.
- לפי משפט, איחוד אינסופי בר-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא בר-מניה ולכן הקבוצה A היא בת-מניה ומתקיים $|A| \leq |\mathbb{N}|$ כנדרש.

לפי משפט קש"ב $|A| = |\mathbb{N}|$, כלומר $|A| = \aleph_0$.

15 נקודות

3. תהי A קבוצה לא ריקה של סדרות אינסופיות של מספרים טבעיים, אשר כל שתי סדרות בה שוות החל ממקום מסוים (לאו דווקא החל מאותו מקום). הוכיחו או הפריכו:

א. A אינסופית.

ב. A סופית.

ג. A בת-מניה.

פתרון:

א. **הפרכה:** נבחר את הקבוצה $A = \{(1,2,3,4,\dots),(2,2,3,4,\dots)\}$.

ברור ש-A מקיימת את התנאי (יש בה שתי סדרות והן שוות החל מהמקום השני).

אבל $|A| = 2$ ולכן A לא אינסופית.

ב. **הפרכה:** נבחר את הקבוצה $A = \{(1,1,1,\dots),(2,1,1,\dots),(3,1,1,\dots),(4,1,1,\dots),\dots\}$.

ברור ש-A מקיימת את התנאי (כל שתי סדרות בה שוות החל מהמקום השני).

אבל A אינה סופית, היא שקולה לטבעיים לפי הפונקציה $f:\mathbb{N}\to A$ המוגדרת כך $f(n) = (n,1,1,\dots)$ אשר הינה הפיכה.

ג. **הוכחה:**

- A לא ריקה לכן קיימת סדרה $S \in A$ כלשהי שהינה סדרה אינסופית של מספרים טבעיים.
- נשים לב שלפי הגדרת A כל שאר הסדרות ב-A זהות ל-S החל ממקום מסוים.
- לכל $1 \le i \in \mathbb{N}$, נסמן ב- A_i את קבוצת הסדרות אשר זהות ל-S החל מהאינדקס ה-i.
- ברור מההגדרה ש-$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.
- לכל $1 \le i \in \mathbb{N}$, כל סדרה ששייכת ל-A_i שונה מ-S ב-i המקומות הראשונים בלבד ולכן ניתנת לייצוג ע"י i-יה סדורה של טבעי (כי מהמקום ה-i ידוע כבר שאיברי הסדרה זהים לאיברי S).
- לכן עוצמת כל קבוצה A_i היא <u>לכל היותר</u> כעוצמת המכפלה הקרטזית <u>הסופית</u> $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}|$ כלומר לפי משפט $A_i \le \aleph_0$ ולכן A_i בת מניה.
- כעת נתבונן בקבוצה $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. קבוצה זו הינה איחוד אינסופי בר מניה של קבוצות בנות מניה ולכן לפי משפט היא בת מניה.

20 נקודות

4. תהא $A \subseteq \mathbb{R}^+$ קבוצה של ממשיים חיוביים, עבורה קיים $x \in \mathbb{R}^+$, כך שלכל תת-קבוצה סופית $S \subseteq A$, מתקיים שסכום האיברים ב-S קטן מ-x.

א. הוכיחו שהקבוצה $A \cap [1,2]$ בת-מניה.

ב. הוכיחו ש-A הינה בת-מניה.

פתרון:

א. תהי A קבוצה כמתואר ויהי x כמתואר.

- מכיוון שכל מספר ב-$A \cap [1,2]$ גדול או שווה ל-1 וסכומם קטן מ-x, יש לכל היותר $\lfloor x \rfloor$ איברים ב-$A \cap [1,2]$. מכאן שהקבוצה סופית ולכן בת מניה.

ב. נפריד את A לשני חלקים: $A \cap (0,1)$ ו-$A \cap [1,\infty)$.

1. בדומה להסבר בסעיף א', גם בקבוצה $A \cap [1,\infty)$ יש לכל היותר $\lfloor x \rfloor$ איברים ולכן היא סופית ובת-מניה.

2. נוכיח שגם הקבוצה $A \cap (0,1)$ בת-מניה:

- לכל $x \in (0,1)$ ממשי קיים $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ כך ש-$x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.
- לכן $A \cap (0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)\right)$.
- לכל $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ יש לכל היותר $\lfloor x(n+1) \rfloor$ איברים ב-$A \cap \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ (הסבר דומה לזה שבסעיף א').
- לכן $A \cap (0,1)$ היא איחוד בר-מניה של קבוצות סופיות ולפי משפט היא בת מניה.
- מכאן ש-A כולה היא איחוד של שתי קבוצות בנות מניה ולכן בת-מניה.

20 נקודות

5. הוכיחו או הפריכו: הקבוצות הבאות הן אינסופיות בנות-מניה:

א. A - קבוצת כל הפונקציות המלאות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שהינן פולינומים עם מקדמים רציונליים.
כלומר פונקציות מהצורה:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad , \quad a_0,\dots,a_n\in\mathbb{Q}$$

ב. B - קבוצת כל הפונקציות המלאות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימות $f(x)=x$ לכל $x\notin\{1,2,3\}$.

ג. C - קבוצת כל הפונקציות המלאות וחח"ע $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימות $f(x)=x$ לכל $x\notin\{1,2,3\}$.

פתרון:

א. **הוכחה:** נוכיח ש-A אינסופית ובת-מניה:

A אינסופית:

- נשים לב שקבוצת הפולינומים $\{0x,1x,2x,3x,4x,\dots\}$ מוכלת ב-A.
- קבוצה זו שקולה לטבעיים (קל לראות!) ולכן היא אינסופית.
- מכיוון ש-A מכילה קבוצה אינסופית הרי שהיא אינסופית בעצמה.

A בת-מניה:

- נגדיר את הפונקציה $g:A\to\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Q}^{n+1}$ באופן הבא:

$$g(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)=(a_0,a_1,\dots,a_n)$$

- **g מלאה:** לפי הגדרת A כל הפונקציות הן פולינומים ולכן לכל אחת קיים מספר סופי של מקדמים רציונליים שונים מ-0.
- **g חח"ע:** תהיינה $f_1,f_2\in A$ המקיימות $g(f_1)=g(f_2)$.

מהגדרת שוויון n-יות סדורות, כל המקדמים של שני הפולינומים שווים ולכן $f_1=f_2$ (כי כל פולינום נקבע באופן יחיד ע"י מקדמיו).

- לכן $|A|\le|\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Q}^{n+1}|$.
- ידוע ש-$\mathbb{Q}$ בת מניה ומכפלה קרטזית סופית של קבוצות בנות מניה היא בת-מניה, לכן $\mathbb{Q}^{n+1}$ היא בת-מניה לכל $n\in\mathbb{N}$.
- מכאן ש-$\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{Q}^{n+1}$ בת-מניה כאיחוד אינסופי בר-מניה של קבוצות בנות מניה.
- לכן A בת-מניה.

ב. **הוכחה:** ש-B אינסופית ובת-מניה:

B אינסופית:

- נגדיר קבוצת פונקציות $S=\{h_i|i\in\mathbb{N}\}$ כאשר $h_i:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת כך:

$$h_i(x)=\begin{cases} i+4 & x=1,2,3 \\ x & else \end{cases}$$

(הסבר אינטואיטיבי שאינו חלק מההוכחה: h_i מתאימה ל-1,2,3 את הקבוע הטבעי $i+4$ כדי שלא יהיה מצב שהמספר מותאם לעצמו ולכל שאר המספרים היא מתאימה את עצמם).

- קל לראות ש-$S\sim\mathbb{N}$ ולכן היא אינסופית.

- כמו כן קל לראות ש-$S \subseteq A$.
- לכן A אינסופית.

B בת-מניה:

- נגדיר את הפונקציה $g: B \to \mathbb{N}^3$ באופן הבא:

$$g(f) = \big(f(1), f(2), f(3)\big)$$

- **g מלאה:** לפי הגדרת B כל הפונקציות ב-B הן מלאות.
- **g חח"ע:** תהיינה $f_1, f_2 \in B$ המקיימות $g(f_1) = g(f_2)$.
  - לכן $\big(f_1(1), f_1(2), f_1(3)\big) = \big(f_2(1), f_2(2), f_2(3)\big)$
  - מהגדרת שוויון זוגות סדורים $f_1(1) = f_2(1),\ \ f_1(2) = f_2(2),\ \ f_1(3) = f_2(3)$.
  - נזכיר שעבור כל $x \neq 1,2,3$ מתקיים $f_1(x) = f_2(x) = x$.
  - לכן לפי הגדרת שוויון פונקציות $f_1 = f_2$. (לפונקציות גם יש אותו תחום ואותו טווח).
- $\mathbb{N}^3$ היא קבוצה בת-מניה כמכפלה קרטזית סופית של קבוצות בנות מניה.
- לכן $|B| \leq |\mathbb{N}^3|$, כלומר B בת מניה.

ג. הפרכה: A היא סופית ומתקיים $|A| = 6$.

A אינסופית:

- מכיוון ש-A מלאה וחח"ע ומתקיים $f(x) = x$ לכל $x \notin \{1,2,3\}$ הרי שהתמונות של המספרים $1,2,3$ הן בהכרח המספרים $1,2,3$ (כל השאר הם התמונות של עצמן והפונקציה חח"ע).
- מספר התמורות של מספרים אלו הוא $3! = 6$.

15 נקודות

6. לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר: $P_k(\mathbb{N}) = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid |S| = k\}$. הוכיחו:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$$

פתרון:

נסמן $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k(\mathbb{N})$.

- נגדיר $f: \mathbb{N} \to A$ באופן הבא: $f(n) = \{n\}$.
- f מוגדרת היטב כי $P_1(\mathbb{N}) \subseteq A$ (כלומר כל הסינגלטונים הם איברים ב-A).
- בנוסף קל לראות ש-f מלאה וחח"ע.
- מכאן ש-$|\mathbb{N}| \leq |A|$ ולכן A אינסופית.

כעת נשים לב שהקבוצה A היא איחוד אינסופי בר-מניה (כי $k \in \mathbb{N}$).

נוכיח כי כל אחת מהקבוצות $P_k(\mathbb{N})$ באיחוד היא בת מניה ולכן לפי משפט הקבוצה A כולה היא בת מניה:

- יהי $k \in \mathbb{N}$.
- ראשית, k הוא סופי ולכן כל איבר S בקבוצה $P_k(\mathbb{N})$ הוא קבוצה סופית של מספרים טבעיים. בכל קבוצה נסדר את איבריה מהקטן לגדול ונסמנם $a_1, \dots a_k$.
- שנית, נזכיר שיש אינסוף ראשוניים, לכן בפרט יש k ראשוניים (לכל k טבעי), נסדר גם אותם מהקטן לגדול ונסמנם $p_1, \dots, p_k$.
- נגדיר $g: P_k(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$g(S) = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

- g מלאה ומוגדרת היטב (מחזירה מספר טבעי יחיד עבור כל קבוצה שהיא מקבלת).
- g חח"ע לפי יחידות הפירוק לגורמים ראשוניים (כפי שהוסבר בתרגול).
- לכן לכל $P_k(\mathbb{N})$ מתקיים $|P_k(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$ כלומר היא בת מניה.
- לפי משפט הקבוצה A כולה היא בת מניה, כלומר $|A| \leq |\mathbb{N}|$.

סה"כ קיבלנו ש-$A \sim \mathbb{N}$ כנדרש.